УДК 550.831

Дубовенко Ю.І., *канд. фіз.-мат. наук, н.с.*
Інститут геофізики НАН України, Київ, dubovenko@igph.kiev.ua

Особливості трансформацій гравітаційного поля в задачі Алексідзе

Результатом зйомок гравіметричного поля є значення $g(S)$ модуля градієнта потенціалу сили тяжіння (МГПСТ) на деякій гладкій замкнутій поверхні *S*, яка цілком охоплює всі тяжіючі маси. Напрям $g(S)$ невідомий, тому задачу трансформацій поля неможливо звести до лінійних граничних задач. Наближений однозначний розв'язок вказаної задачі можна отримати і на незамкнутій проте достатньо великій (порядку 1°×1°) поверхні S .

Спосіб трансформації. Один із шляхів трансформації і перерахунку значень сили тяжіння пов'язують з розв'язанням нелінійної зовнішньої граничної задачі Алексідзе для потенціалу сили тяжіння [1]:

$$\Delta u(x_i) = -4\pi\gamma\sigma(x_i),\ u|_\infty = 0,\ |\mathrm{grad}\,u| = \left.\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2}\right|_S = g(S) \equiv \psi(S) \qquad (1)$$

Цю задачу лінеаризують шляхом певних припущень щодо напрямку градієнта потенціалу на поверхні *S*. Такі припущення вносять певні похибки, бо визначення напряму сили тяжіння – громіздка задача, чи не складніша за визначення модуля сили тяжіння.

Проблема розв'язності і єдиності цієї нелінійної граничної задачі (1) принципова для гравіметрії: відповідає, чи можливе точне однозначне визначення сили тяжіння в зовнішньому просторі на основі точного визначення абсолютного значення сили тяжіння на замкнутій поверхні *S*, що цілком охоплює усі маси і яка додаткова інформація потрібна для цього. За одночасного визначення значення і напряму сили тяжіння на поверхні *S* обчислення сили тяжіння в зовнішньому просторі є розв'язком задачі Діріхле. Сумісні визначення модуля і напряму сили тяжіння дорогі і, в масовій гравірозвідці не проводяться.

Розв'язують граничну задачу (1) методом послідовних наближень. У плоскому випадку задача (1) визначення потенціалу, як гармонічної функції, модуль градієнта якої заданий на замкнутому контурі, не має єдиного розв'язку. Якщо дійсна частина u (x,y) голоморфної на сфері G, яка повністю охоплює *S*, функції *f(z)=u (x,y) + iv (x,y)* є розв'язком граничної задачі, уявна частина теж є розв'язком тієї ж граничної задачі.

Для розв'язання граничної задачі (1) у плоскому випадку задіяно такий ітераційний процес

$$\Delta u^k = 0,\ \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = \psi(S),\ \ \alpha_1 = \frac{\partial u^{k-1}}{\partial x_1} \Big/ \left|\mathrm{grad}\,u^{k-1}\right|,\ \alpha_2 = \frac{\partial u^{k-1}}{\partial x_2} \Big/ \left|\mathrm{grad}\,u^{k-1}\right| \qquad (2)$$

де u^k – k-те наближення розв'язку граничної задачі (1) у плоскому випадку. Розв'язання задачі (2) здійснено методом розкладення за неортогональними функціями, і досліджено чисельну збіжність ітерацій.

Досліджено похибку заміни рівняння сили тяжіння, якому реально задовольняють граничні дані задачі (1) на сфері G з радіусом Землі, на рівняння Лапласа: вона є різницею розв'язків відповідних граничних задач типу (1) для рівняння сили тяжіння та рівняння Лапласа. При розмірі площі гравіметричних зйомок 100 км ця похибка, як показано в [2], варіює в межах 75 мГал ≤ ε ≤ 81 мГал за умови перерахунку значень сили тяжіння у вільному просторі за формулою Пуассона [3].

Виходячи з властивостей рівняння сили тяжіння і умови $\Delta g \geq 0$ увігнутості поверхні спостережень, істинне значення сили тяжіння завжди буде меншим, аніж одержане за припущення його гармонічності. Порівняння відповідних похибок для сфери G виявляє, що аналітична модель для сили тяжіння значно краще апроксимується диференціальним рівнянням типу Клейна-Гордона, ніж рівнянням Лапласа.

Але у гравіметричній практиці при перерахунку в зовнішньому просторі розв'язують не внутрішню граничну задачу, а зовнішню. Максимальна величина похибки перерахунку у зовнішньому просторі щодо області G дорівнює $\max \varepsilon|_{r=2a} = -g(a)/4$, де *g(a)* – значення сили тяжіння на поверхні ідеально сферичної Землі. Так, припущення гармонічності сили тяжіння в перерахунку на висоту 6000 км генерує похибку 245 Гал.

Завдяки розходженню векторів складових традиційних аномалій сили тяжіння $|\delta\vec{g}| = |\vec{\gamma}| - |\vec{g}|$, їх величини можуть значно відрізнятися від точних значень аномалій сили тяжіння. Якщо навіть аномалія сили тяжіння $|\vec{\gamma}| - |\vec{g}|$ високоточна, її не можна перерахувати в зовнішньому просторі: диференціальне рівняння сили тяжіння *істотно* залежить від швидкості зміни кутів між напрямом аномалії сили тяжіння і координатними осями, а в локальних аномаліях цей напрям може значно варіювати, і всяке наближене припущення про його поведінку істотно спотворює перерахунок аномалій сили тяжіння. Тому практично важливо, що вираз $|\vec{\gamma}| - |\vec{g}|$ співпадає з великою точністю з проекцією вектора аномалії сили тяжіння на напрям вектора $\vec{\gamma}$.

Чисельне моделювання. Проведено чисельне розв'язання нелінійної граничної задачі (1) для плоского і тривимірного випадку з метою перевірки збіжності ітераційного процесу (2) на модельних задачах з відомими точними розв'язками в горизонтальній площині *S*. В процесі ітерацій застосовано метод фундаментальних розв'язків в точках поверхні *S*, на рівномірній сітці з кроком 10 км.

За перше наближення напрямних косинусів α_i узяті грубі наближення 0, 0, 1,а в іншому варіанті розв'язку – 0.8, 0, 0.6. Кожна з граничних задач розв'язувалася для різних перших наближень і різного положення на площині допоміжних точок, що визначають фундаментальні розв'язки. Число ітерацій у всіх випадках не перевищувало 10. Порівняння точних і наближених значень МГПСТ виявляє, що їх граничні значення у всіх точках співпадають з точністю до 10^{-7}, змінюються в межах 0,07÷0,133, а вони самі співпадають з меншою точністю, що пояснюється поганою обумовленістю взагалі граничних задач з граничними умовами, що містять похідні (для них на відміну від задачі Діріхле несправедливий принцип максимуму). Цю обставину, не пов'язану із збіжністю ітерацій, слід враховувати при вирішенні практичних задач.

Обчислено розв'язок внутрішньої граничної задачі

$$\Delta u(x_i)=0,\ x_i\in G,\ \left|\operatorname{grad} u\right\|_S=\psi(S) \qquad (3)$$

для одиничного куба G, в якого зовнішня нормаль має 6 різних напрямів, гранична функція має вигляд $\psi(S)=\dfrac{10}{x_1^2+x_2^2+5^2}$, початок координат (0,0,0) розташовано на відстані 0,2 від нижньої кромки куба G, а 24 допоміжні точки узяті на кубі зі стороною 1,4. За перше наближення напрямних косинусів α_i в ітераційному процесі (2) узяті сталі 0, 0 і 1. Після 5-ї ітерації граничні значення задовольнялися достатньо (похибка менша 1%), але функція і її похідні не мали нічого спільного з точним розв'язком $U=\dfrac{10}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+5^2}}$ і її похідними. Збільшення числа ітерацій до 24 не збільшило точність наближення. Додали 25-й фундаментальний розв'язок, який співпадає з точним розв'язком граничної задачі (3) і після 4-ї ітерації і граничні умови, і значення градієнтів і їх похідних задовольнялися з точністю 10^{-3}.

Збіжність ітерацій (2) окремо вивчено шляхом розв'язання зовнішньої граничної задачі (1) для одиничного круга з центром в початку координат (точний розв'язок задачі – $u=\ln\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, початкові наближення коефіцієнтів $\alpha_1^0=\cos(t+\varphi),\ \alpha_2^0=\sin(t+\varphi)$, де t – центральний кут, φ – міра збурення початкового напряму градієнта шуканої функції), з обривом ітерацій по досягненні умови $|\varepsilon|=\left\|\operatorname{grad} u^k\right|-1\right|<10^{-5}$.

Виявлено, що для збіжності ітерацій (2) необхідно не лише, щоб точний розв'язок задовольняв умові [4]

$$\inf_{x_2\in S}(N,l)>0, \qquad (4)$$

але і вибір такого початкового наближення, для якого в ітераціях (2) не виникали б коефіцієнти a_i^k, які не забезпечують виконання цієї умови. Умова (4) означає, що напрям зовнішньої нормалі N не має бути ортогональним напряму l косої похідної, тобто l в жодній точці границі S не має співпадати з дотичним напрямом. Ця умова виконується для будь-якої скінченої частини площини S, якщо поле створене точковим джерелом, а для всієї нескінченної площини вона не виконується.

При розв'язанні практичних задач шукають не потенціал W сили тяжіння, а потенціал U аномалії сили тяжіння, пов'язаний з W через $W=U+V$, де V – потенціал нормального значення сили тяжіння, вважають відомим. За лінійних наближень граничних задач граві- і магнітометрії цей перехід до аномалії не змінює ні рівняння, ні вигляд оператора граничних умов, необхідно лише за граничну функцію $\psi(S)$ узяти аномалію сили тяжіння. У нелінійних граничних задачах перехід до аномалії змінює ліву частину граничних умов (1) через те, що операція обчислення модуля градієнта не дистрибутивна: $|\operatorname{grad} W|\neq|\operatorname{grad} U|+|\operatorname{grad} V|$ $gradW$ |.

Якщо гранична функція $\psi(S)$ – модуль градієнта потенціалу W сили тяжіння, для визначення потенціалу аномалії U одержуємо таку нелінійну граничну задачу

$$\Delta u(x_i)=0,\ x_i\in G,\ u|_\infty=v|_\infty,\ U_{x_1}^2+U_{x_2}^2+U_{x_3}^2+2\left(V_{x_1}U_{x_1}+V_{x_2}U_{x_2}+V_{x_3}U_{x_3}\right)=\psi^2(S)-|\operatorname{grad} V|^2, \qquad (5)$$

граничні значення якої за нульового потенціалу нормальної сили тяжіння співпадають з граничними умовами (1). З'ясування чисельної швидкості збіжності задачі (5) представляє окремий практичний інтерес.

1. *Дубовенко Ю.І.* Спосіб відновлення потенціалу за значеннями модуля його градієнта: Зб. тез наук. конф. „Геофізичні технології прогнозування та моніторингу геологічного середовища", Львів, 6-10 жовтня 2008 р. – Львів: Сполом, 2008. – С. 156-158; 2. *Дубовенко Ю.І.* Про роздільну здатність редукцій аномалій сили тяжіння // Геофіз. журн.– 2011. – **33**, № 2. – С. 135-143; 3. Гравиразведка: Справочник геофизика / Под. ред. Е.А. Мудрецовой, К.Е. Веселова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1990. – 607 с.; 4. Алексидзе М.А. Решение некоторых основных задач гравиметрии. – Тб.: Мецниереба, 1985. – 412 с.

***Dubovenko Yu.I.* Gravity transformations peculiarities in the Alexidze problem.**